Tablas Semánticas - Árboles de Refutación

- Método alternativo a tablas de verdad para averiguar satisfacibilidad de fórmulas.

- Su uso se basa en la estrategia de refutación.

  ✓ deducción por refutación

  $\models B$ sí y sólo sí $\neg B$ es contradicción

  $A \models B$ sí y sólo sí $\{A, \neg B\}$ es insatisfacible $(A = \{A_1, A_2, ..., A_n\})$

- <u>Tabla semántica</u>:

  Secuencia de fórmulas proposicionales construidas de acuerdo a ciertas reglas, usualmente representada gráficamente como un árbol.

Árboles de Refutación

- Dadas A, B fórmulas proposicionales:

<u>Regla 1</u>:	<u>Regla 2</u>:	<u>Regla 3</u>:	<u>Regla 4</u>:
$\neg\neg A$	$A \wedge B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \rightarrow B)$
A	A	$\neg A$	A
	B	$\neg B$	$\neg B$

REGLAS de TIPO A

<u>Regla 5</u>:

$A \vee B$

$A \qquad B$

<u>Regla 6</u>:

$\neg(A \wedge B)$

$\neg A \qquad \neg B$

<u>Regla 7</u>:

$A \rightarrow B$ premisas

$\neg A \qquad B$ conclusiones

REGLAS de TIPO B

Árboles de Refutación

- Las reglas de tipo ***A*** son las que tienen una o dos conclusiones en la misma rama.

  Una valuación *v* satisface a la premisa sí y sólo sí *v* satisface a **todas** las conclusiones.

- Las reglas de tipo ***B*** son las que tienen dos conclusiones separadas en distintas ramas.

  Una valuación *v* satisface a la premisa si y solo si *v* satisface **al menos una** de las conclusiones.

Heurística para aplicar reglas:
Aplicar las reglas de tipo A antes que las de tipo B.

Árboles de Refutación

Lema:
Toda fórmula que NO es una variable proposicional o negación de una variable proposicional, es de la forma de la premisa de una (y sólo una) de las reglas.

Estas reglas proveen un método alternativo a las Tablas de Verdad para determinar satisfacibilidad de fórmulas.

Ejemplos:
Usando árboles de refutación, determinar si las siguientes fórmulas son tautologías o no.

1) $F1 = (((p \vee q) \to r) \to ((p \to r) \wedge (q \to r)))$

2) $F2 = ((p \wedge q) \to \neg(p \vee \neg q))$

3) $F3 = (((p \vee q) \to r \wedge s) \to ((p \to r \wedge s) \wedge (q \to r \wedge s)))$

Árboles de Refutación

Definiciones:

- Un **árbol de refutación** de una **fórmula F** se obtiene haciendo un número finito de **aplicaciones inmediatas de las reglas**, partiendo del **árbol** cuyo único nodo es **F**.

- Un **árbol de refutación** de un **conjunto finito C de fórmulas** es un **árbol de refutación** de la **conjunción** de todas las **fórmulas de C.**

- Una **rama** de un árbol de fórmulas se dice **cerrada** si **contiene** a la vez una **fórmula y su negación**.
En **caso contrario**, se dice **abierta**.

- Un **árbol** se dice **cerrado** si **todas** sus **ramas** son **cerradas.**

Árboles de Refutación

-Un conjunto C de fórmulas se dice **saturado** sí y sólo sí satisface las siguientes condiciones:

i) Una fórmula y su negación no pueden estar simultáneamente en C.
ii) Si una fórmula de tipo A está en C, entonces sus dos conclusiones están en C, excepto para la regla 1 que es una sola conclusión.
iii) Si una fórmula de tipo B está en C, entonces al menos una de sus dos conclusiones están en C.

- Una rama de un árbol de fórmulas se dice saturada si el conjunto formado por las fórmulas de sus nodos es un conjunto saturado.

Observación:

Una rama saturada no puede ser cerrada.

Árboles de Refutación

- Un **árbol de refutación** se dice **completo** si cada una de sus ramas es **cerrada o saturada**.

Observación:

Todo **árbol de refutación cerrado** es un **árbol completo**.

Lema 1:

Toda fórmula F tiene por lo menos un **árbol de refutación completo**.

Lema 2:
Si F es una **fórmula satisfacible**, entonces **todo árbol de refutación de F** tiene **al menos una rama abierta**.

Lema 3:
Todo **conjunto saturado** de fórmulas es **satisfacible**.

Árboles de Refutación

Teorema:
Las siguientes propiedades son equivalentes para todo conjunto finito y no vacío $C \subseteq F_m$

i) C es satisfacible.

ii) Todo árbol de refutación de C tiene por lo menos una rama abierta.

iii) Existe un árbol de refutación completo de C con una rama abierta.

Árboles de Refutación

Corolario 1:
Las siguientes propiedades son equivalentes para todo conjunto finito y no vacío $C \subseteq F_m$

i) C es insatisfacible.

ii) C tiene un árbol de refutación cerrado.

iii) Todo árbol de refutación completo de C es cerrado.

Corolario 2:
Las siguientes propiedades son equivalentes para toda fórmula F:

i) F es tautología

ii) $\neg F$ tiene un árbol de refutación cerrado.

iii) Todo árbol de refutación completo de $\neg F$ es cerrado.

Árboles de Refutación

Ejercicios:

Usando árboles de refutación, probar las siguientes tautologías:

$\models (A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))$

$\models (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Usando árboles de refutación, determinar cuáles de las siguientes consecuencias semánticas son válidas:

$\{ A \vee B \} \models A \rightarrow B$

$\{A \rightarrow B, \neg C \rightarrow \neg B \} \models (A \rightarrow C)$