

TRABAJO PRACTICO N° 3

LOGICA DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN: Primera Parte

1. Sea el lenguaje de primer orden L que tiene un símbolo de constante c , dos símbolos de función f y g (f unario y g binario) y dos símbolos de relación binarios P y Q . Decidir cuáles de las siguientes expresiones pertenecen al lenguaje L y cuáles no.

- Para el primer caso determine cuáles son términos, cuáles fórmulas atómicas y cuáles fórmulas.
- Para las que no pertenecen al lenguaje indique por qué.

- (a) $(\exists f(x)P(f(x, y)))$
- (b) $\forall x(P \vee Q)$
- (c) $g(f(x), f(y))$
- (d) $\forall x\exists cP(x, c)$
- (e) $\exists x\exists yQ(P(x, y), P(y, x))$
- (f) $P(f(x), f(y))$
- (g) $\forall x\exists y(P(g(x, y), y) \wedge \neg Q(x, y))$
- (h) $g(x, \exists y(P(y, c)))$

2. Para cada una de las siguientes fórmulas:

- (a) Determine el alcance de cada cuantificador e indique cuáles son las variables libres y cuáles las ligadas.
- (b) Realice los cambios necesarios para que cada ocurrencia de una variable aparezca libre o ligada, y en este último caso a un solo cuantificador.
- (c) Determine si es o no cerrada.
 - 1. $\forall x(P(x, y) \rightarrow Q(x))$
 - 2. $\forall xP(x, y) \rightarrow Q(x)$
 - 3. $\exists x(A(x, y) \wedge \forall yB(y))$
 - 4. $\forall x(\forall yA(x, y, z) \rightarrow \exists xA(x, z, z))$
 - 5. $\exists xA(x) \rightarrow \forall xA(x)$
 - 6. $\forall x(\forall y(A(x, y) \rightarrow \exists zB(y, z)) \rightarrow \exists xC(x, z))$

3. Para cada una de las siguientes fórmulas, realice las sustituciones indicadas. Justifique.

- (a) $A = \forall x(P(x, y) \rightarrow Q(x))$ $A(y/f(c))$ para c constante
- (b) $A = \forall x(P(x, y) \rightarrow Q(x))$ $A(y/f(x))$
- (c) $A = \forall x(P(x, y) \rightarrow Q(x))$ $A(x/f(c))$ para c constante
- (d) $A = \exists x(D(x, y) \wedge \forall yB(y, z))$ $A(y/f(c), z/c)$ para c constante
- (e) $A = \exists x(D(x, y) \wedge \forall yB(y, z))$ $A(y/f(z), z/y)$
- (f) $A = \exists xD(x, y) \wedge \forall yB(y, x)$ $A(y/f(c), x/f(c))$ para c constante

(g) $A = \forall x D(x) \rightarrow \exists x \exists y (B(x) \wedge C(x, y)) \quad \dots \quad A(x/f(y), y/z) \quad \text{para } c \text{ constante}$

4. Dadas e_1 y e_2 sustituciones:

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| (a) $e_1 = \{x/y, y/f(x)\}$ | $e_2 = \{x/a, y/x, z/f(a)\}$ |
| (b) $e_1 = \{y/f(x), z/b\}$ | $e_2 = \{x/c, z/c\}$ |
| (c) $e_1 = \{x/a, y/z\}$ | $e_2 = \{x/a, y/c, z/y\}$ |
| (d) $e_1 = \{x/f(y), y/z\}$ | $e_2 = \{x/a, y/c, z/f(y)\}$ |
| (e) $e_1 = \{x/a, y/f(z, a)\}$ | $e_2 = \{x/b, y/c, z/y\}$ |

1. Calcule la composición $e_1 e_2$
2. Calcule $A e_1 e_2$ siendo $A = \exists x D(x, y) \wedge \forall y B(y, z)$

5. Dados los siguientes predicados:

$real(x)$ x es un número real $int(x)$ x es un número entero
 $primo(x)$ x es un número primo
 $par(x)$ x es un número par
 $mayor(x, y)$ x es mayor que y $suma(x, y, z)$ $x + y = z$

Reescriba en lenguaje natural las siguientes fórmulas de la lógica de predicados de primer orden.

- (a) $\forall x (\neg par(x) \rightarrow primo(x))$
- (b) $\forall x (int(x) \rightarrow real(x))$
- (c) $\forall x (primo(x) \wedge mayor(x, 2) \rightarrow \neg par(x))$
- (d) $\exists x (int(x) \wedge par(x) \wedge primo(x))$
- (e) $\forall x \forall y \exists z (int(x) \wedge int(y) \rightarrow int(z) \wedge suma(x, y, z))$
- (f) $\exists z \forall x \forall y (int(x) \wedge int(y) \rightarrow int(z) \wedge suma(x, y, z))$

6. Formalice en la lógica de predicados de primer orden las siguientes oraciones del lenguaje natural, usando funciones siempre que sea posible:

- (a) Pedro ama a la hermana de María.
- (b) Todo padre quiere mucho a sus hijos.
- (c) Si la suma de dos números enteros es más grande que su producto, luego uno de los números debe ser cero.
- (d) En los números reales, el producto de cualquier número real positivo por cualquier número negativo, es negativo.

7. Dadas las siguientes oraciones en lenguaje natural:

- (a) Algunos caballos son salvajes.
- (b) No hay un número primo entre 23 y 29.
- (c) No todos los pájaros pueden volar.
- (d) Cada persona es amada por alguien.
- (e) Todas las personas tienen algún amigo.

- (f) Sólo los científicos que trabajan en áreas aplicadas son famosos.
 - (g) En los números naturales, el siguiente de cualquier número par no es par. El siguiente de cualquier número impar es par.
 - (h) Si el producto de dos números naturales es múltiplo de un número primo, entonces uno de ellos es múltiplo del número primo.
 - (i) Dos personas son hermanas si tienen el mismo padre.
1. Formalice cada oración en la lógica de predicados de primer orden.
 2. Escriba la negación de cada fórmula obtenida y vuelva a traducirla al lenguaje natural.
8. Formalice en la lógica de predicados de primer orden las siguientes oraciones en lenguaje natural, primero sin utilizar cuantificadores existenciales y después sin utilizar cuantificadores universales.
- (a) Algunas personas son simpáticas o altas.
 - (b) No todas las bicicletas tienen dos ruedas.
 - (c) Ningún ratón es más pesado que un elefante.
 - (d) Todo número es negativo o posee raíz cuadrada.
9. Formalice en la lógica de predicados de primer orden las siguientes oraciones del lenguaje natural:
- (a) No existe ningún profesor que sea alto.
 - (b) Existe un profesor que está más ocupado o tiene más éxito que cualquier alumno.
 - (c) Si todos los individuos son alumnos, no existe ninguno que vaya al gimnasio.
 - (d) En general, cualquier individuo está más ocupado que otro sí y sólo si éste va al gimnasio y el otro no.
 - (e) Todos los profesores que van al gimnasio conocen a algún alumno.
 - (f) Sólo los profesores que van al gimnasio conocen a algún alumno.
 - (g) Algunos alumnos sólo conocen a los profesores que van al gimnasio.
10. Sean las siguientes relaciones definidas sobre el conjunto de las piezas de ajedrez: $T(x)$ significa que x es una torre, $C(x)$ significa que x es un caballo, $MD(x)$ que x se mueve en diagonal, $B(x)$ que x es una pieza blanca, $N(x)$ que x es una pieza negra, $CP(x, y)$ significa que x come a y ; $A(x, y)$ significa que x está alineada con y . Usando únicamente estos símbolos de relación definidos traduzca las siguientes oraciones a la lógica de predicados de primer orden:
- (a) Ninguna torre se mueve en diagonal.
 - (b) Toda pieza se mueve en diagonal, salvo si es una torre o un caballo.
 - (c) Una pieza blanca sólo come piezas negras.
 - (d) Para que una torre coma un caballo es necesario que las dos piezas estén alineadas.