TRABAJO PRACTICO Nº 3
(Segunda Parte)

LOGICA DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN: MODELOS

1. Sea el lenguaje de primer orden L que tiene un símbolo de constante c, un símbolo de función unaria f_1, dos símbolos de funciones binarias f_2 y f_3, dos símbolos de predicados binarios P_1 y P_2, y dado el modelo $M_1 =< D, \{=, <\}, \{suc, +, *\}, \{0\} >$ donde
$D = N$ (conjunto de los números naturales) es el dominio $c^N = 0$
$P_1^D(x, y) = \{(x, y) \in D \times D : x = y\}$ $P_2^D(x, y) = \{(x, y) \in D \times D : x < y\}$
$f_1^D(x) = suc(x) = x + 1$ $f_2^D(x, y) = x + y$ $f_3^D(x, y) = x * y$

   Usando el lenguaje dado represente mediante fórmulas cada una de las siguientes oraciones:

   (a) 0 no tiene sucesor.
   (b) Todo número natural tiene un sucesor.
   (c) Si dos números tienen el mismo sucesor son iguales.
   (d) El sucesor del sucesor de cualquier número es mayor que el sucesor de ese mismo número.

2. Dado el conjunto de datos de la Tabla 1 y el siguiente conjunto de relaciones:

Tabla 1	Edad	País	Deporte	Ocupación
Andrea	35	Argentina	Tenis	Ama de casa
Beatriz	17	Uruguay	Hockey	Contadora
Carlos	55	Paraguay	Tenis	Empleado
Julio	35	Brasil	Fútbol	Contratista
Eduardo	38	Argentina	Tenis	Comerciante

   $P^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 : x \text{ vive en el mismo país que } y\}$
   $E^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 : x \text{ tiene la misma edad que } y\}$
   $O^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 : x \text{ tiene la misma ocupación que } y\}$
   $A^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 : x \text{ practica el mismo deporte que } y\text{, y ambos son argentinos}\}$
   (a) Describir por extensión los conjuntos P^D, E^D, O^D y A^D
   siendo el dominio $D = \{Andrea, Beatriz, Carlos, Julio, Eduardo\}$
   (b) Si es posible, dar dos ejemplos de fórmula válida y dos ejemplos de fórmula falsa en el modelo definido.

3. Sea L un lenguaje de primer orden que tiene un símbolo de constante c, un símbolo de relación unaria A, un símbolo de relación binaria B y un símbolo de función unaria f. En el lenguaje L sea el modelo $M =< D, \{A, B\}, \{f\}, \{c\} >$ donde $D = \{1, 2, 3\}$ $A^D = \{1\}$
$B^D = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ $f^D(1) = 1$ $f^D(2) = 3$ $f^D(3) = 2$ $c^D = 2$

   Determine si cada una de las siguientes fórmulas es válida o falsa en el modelo dado. Justifique en cada caso.

(a) $\forall x B(x,x) \rightarrow \exists x \exists y (B(x,y) \wedge B(f(y),x))$

(b) $\forall x \exists y (B(x,y) \rightarrow B(f(x), f(y)))$

(c) $\exists x \forall y (B(x, f(y)) \rightarrow \neg A(x)) \vee \forall x \neg A(x)$

(d) $\forall x \forall y (\neg B(x,y) \rightarrow A(x))$

4. Dada la siguiente fórmula definida en un lenguaje de primer orden L: $\forall x(A(x) \rightarrow A(f(x)))$, ¿existe un modelo en el que dicha fórmula sea falsa? Si su respuesta es afirmativa, defínalo. En otro caso, explique el por qué de la no existencia.

5. Considerando la imagen dada del mundo de los naipes:

   (Corazón y diamante son rojos y trébol y pica, negros)

Consideremos los siguientes predicados:

$Par(a)$ significa que el naipe a tiene un valor par.
$Negro(a)$ significa que el naipe a es de color negro.
$Rojo(a)$ significa que el naipe a es de color rojo.
$Entre(a,b,c)$ significa que el naipe a se encuentra entre b y c.
$Derecha(a,b)$ significa que el naipe a está inmediatamente a la derecha de b.
$Mismocolor(a,b)$ significa que los naipes a y b son del mismo color.
$Juntos(a,b)$ significa que los naipes a y b están juntos.

1. Usando los predicados dados, defina un modelo que represente el mismo mundo que la imagen anterior.
2. Traduzca a lenguaje natural cada una de las siguientes fórmulas.

(a) $\forall x (Rojo(x) \longrightarrow Par(x))$

(b) $\exists x (\neg Par(x) \wedge Rojo(x))$

(c) $\neg \exists x (Rojo(x) \wedge \neg Par(x))$

(d) $\forall x \forall y (Mismocolor(x,y) \longrightarrow \neg Juntos(x,y))$

(e) $\exists x \exists y (Rojo(x) \wedge Rojo(y) \wedge \neg \exists z (\neg Rojo(z) \wedge Entre(z,x,y)))$

(f) $\forall x (Par(x) \longrightarrow \exists y \exists z (\neg Par(y) \wedge \neg Par(z) \wedge Entre(x,y,z)))$

(g) $\forall x (\neg Rojo(x) \longrightarrow \exists y (Rojo(y) \wedge Derecha(x,y)))$

(h) $\forall x(Negro(x) \longrightarrow \exists y(Rojo(y) \wedge (Derecha(x,y) \vee Derecha(y,x))))$

(i) $\forall x(Rojo(x) \longrightarrow \exists y \exists z(Negro(y) \wedge negro(z) \wedge Derecha(x,y) \wedge Derecha(z,x)))$

3. Determine si cada fórmula del inciso anterior es falsa o válida en el modelo definido.

6. Sea L un lenguaje de primer orden que tiene dos símbolos de constante c y d, cuatro símbolos de relación binaria A, B, C y E, un símbolo de función binaria f, y un símbolo de función unaria g. En el lenguaje L, sea el modelo
$M =< D, \{A^D, B^D, C^D, E^D\}, \{f^D, g^D\}, \{c^D, d^D\} >$ donde $D = \{x \in \{a,b\}^* \ y \ x \neq \varepsilon\}$ $c^D = a$
$d^D = b$
$g^D(x) = x^R$ (reversa de x) $f^D(x,y) = x.y$ (x concatenada con y)
$A^D(x,y) = \{(x,y) \in D^2$: x es prefijo de y$\}$ (es decir $y = x.z$ para $z \in \{a,b\}^*$)
$B^D(x,y) = \{(x,y) \in D^2 : x$ es subcadena de $y\}$
$C^D(x,y) = \{(x,y) \in D^2 : x = y\}$
$E^D(x,y) = \{(x,y) \in D^2 : x$ tiene la misma longitud que $y\}$

   Determine si cada una de las siguientes fórmulas es válida o falsa en el modelo dado. Justifique en cada caso.

   (a) $\forall x \exists y(E(x,y) \wedge A(y,x) \rightarrow C(x,y))$
   (b) $\forall x E(x, g(x)) \wedge \exists x \exists y(A(x,y) \wedge \neg B(x,y))$
   (c) $\forall y \exists x(A(x,y) \rightarrow A(g(x), g(g(y))))$
   (d) $\forall x \exists y B(y,x) \rightarrow \forall x \exists y C(x, g(y))$

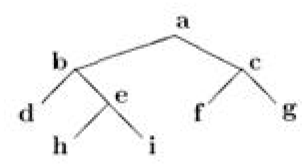
7. Defina al menos dos modelos para un lenguaje de primer orden con únicamente un símbolo de relación binario P, y traduzca las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural:

   (a) $\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow P(y,x))$
   (b) $\forall x P(x,x)$
   (c) $\forall x \forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$

8. Sea L un lenguaje de primer orden que tiene un símbolo de constante c, un símbolo de relación unaria A, un símbolo de relación binaria B y un símbolo de función unaria f. En el lenguaje L sea el modelo $M =< D, \{A, B\}, \{f\}, \{c\} >$ donde $D = \{1,2,3\}$ $A^D = \{1\}$ $B^D = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ $f^D(1) = 1$ $f^D(2) = 3$ $f^D(3) = 2$ $c^D = 2$

   Determine si cada una de las siguientes fórmulas es válida bajo una valuación, válida, o falsa en el modelo dado. Para cada fórmula válida bajo una valuación, dé una valuación que la satisfaga. Justifique en cada caso.

   (a) $\forall x B(x,x) \rightarrow \exists x(B(x,y) \wedge B(f(y),x))$
   (b) $\forall x(B(x,y) \rightarrow B(f(x), f(y)))$
   (c) $\exists x(B(x, f(y)) \rightarrow \neg A(x)) \vee \forall x \neg A(x)$
   (d) $\forall x(\neg B(x,y) \rightarrow A(x))$



9. Dado el siguiente árbol binario rotulado con letras del dominio $D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

   y los siguientes predicados:
   $P^D(x) = \{x \in D :$ el nodo x tiene padre $\}$
   $H^D(x) = \{x \in D :$ el nodo x tiene hijos $\}$
   $L^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 :$ el nodo x es hijo izquierdo del nodo $y\}$
   $R^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 :$ el nodo x es hijo derecho del nodo $y\}$

   (a) Defina por extensión los conjuntos P^D, H^D, L^D y R^D

   (b) Determine si cada una de las siguientes fórmulas es válida, válida bajo una valuación o falsa en el modelo dado. Para las fórmulas válidas bajo una valuación, dé una valuación que las satisfaga.

   1. $\forall x(H(x) \to P(x))$
   2. $\exists x L(y, x) \vee \forall x \exists y R(y, x)$
   3. $(P(x) \vee H(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge \exists y L(y, x) \wedge \exists z R(z, x))$

10. Usando la herramienta FOLST:

    (a) Defina un modelo en el frame Granja.

    (b) Defina dos fórmulas que sean válidas y dos fórmulas que sean falsas en el modelo definido.

11. Dadas las siguientes fórmulas

    $\exists x \exists y(EsCapital(x) \wedge EstaEnEuropa(x) \wedge EstaMasAlSur(x, y))$
    $\forall x(EstaEnAmerica(x) \to HayConexion(x, \text{buenos aires}))$

    Usando la herramienta FOLST

    (a) Defina, si es posible, un modelo en el frame Mundo en el que ambas sean válidas.

    (b) Defina, si es posible, un modelo en el frame Mundo en el que ambas sean falsas.

12. Para cada uno de los siguientes incisos, determine cuál/cuáles de las afirmaciones son correctas y cuáles no. Justifique en cada caso.

    (a) $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ es equivalente a $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

    (b) $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ es equivalente a $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$

    (c) $\forall x(A(x) \vee B(x))$ es equivalente a $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$

    (d) $\exists x(A(x) \vee B(x))$ es equivalente a $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

    (e) Ninguna de las anteriores es cierta.

13. Defina para cada una de las siguientes fórmulas un modelo en donde sea válida y un modelo en donde sea falsa (cuando sea posible). Justifique la elección del modelo en cada caso.

(a) $\forall x R(x) \rightarrow \exists x R(x)$

(b) $\exists x \forall y A(x,y) \rightarrow \forall x \exists y A(x,y)$

(c) $\neg \exists x (\neg (D(x) \vee D(x))$

(d) $\exists x A(x,y) \rightarrow \forall x A(x,y)$

(e) $\forall x (A(x) \vee B(x)) \rightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$

(f) $\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \rightarrow \exists x (A(x) \vee B(x))$

14. Sea el lenguaje de primer orden L que tiene dos símbolos de constante c, d y un símbolo de relación binario P, y dado el modelo $M =< D, \{P\}, \{\}, \{c, d\} >$ donde
$D = N$ (conjunto de los números naturales) es el dominio
$P^D(x,y) = \{(x,y) \in D \times D : x \leq y\}$ $c^D = 0$ $d^D = 1$
Determine y justifique si las siguientes afirmaciones son o no correctas

(a) $P(c,x)$ es válida bajo una valuación en M.

(b) $P(c,x)$ es válida en M.

(c) $\forall x P(c,x)$ es lógicamente válida.

(d) $\forall x \exists y P(x,y)$ es válida en M.

(e) $\exists y \forall x P(x,y)$ es válida en M.

(f) $P(d,c) \wedge \neg P(d,c)$ es contradictoria.

15. Sea L un lenguaje de primer orden que tiene un símbolo de constante c, un símbolo de relación binaria A y un símbolo de función binaria f. En el lenguaje L sea el modelo
$M =< D, \{A\}, \{f\}, \{c\} >$ donde $D = N$ (conjunto de los números naturales),
$A^D = \{(x,y) \in D^2 : x \geq y\}$ $f^D(x,y) = \{z \in D : (x,y) \in D^2; z = x + y\}$ $c^D = 0$
Escribir en todos los casos que sea posible (cuando no sea posible fundamentar por qué), fórmulas bien formadas en el lenguaje L que sean:

(a) falsa en M, pero no contradictoria.

(b) contradictoria

(c) válida bajo una valuación en M, pero no válida en M

(d) válida en M, pero no válida bajo una valuación en M

(e) válida en M, pero no lógicamente válida

(f) lógicamente válida

(g) lógicamente válida pero no válida en M

(h) contradictoria, pero no falsa en M

16. Para cada una de las siguientes fórmulas, encuentre si es posible un modelo en el cual la última fórmula sea falsa pero las primeras sean válidas:

(a) $\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x), B(a), \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ siendo a constante

(b) $\forall x \forall y (A(x) \wedge A(y) \rightarrow C(x,y)), \exists x A(x), \exists x A(f(x)), \exists x C(f(x), x)$